# Una quasi–métrica basada en subsunción

M.A. Gutiérrez Naranjo   J.A. Alonso Jiménez *   J. Borrego Díaz *
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial – Universidad de Sevilla
E–mail: {magutier,jalonso,jborrego}@cica.es
WWW: http://www-cs.us.es/{~naranjo, ~jalonso, ~jborrego}

**Resumen**

En este artículo presentamos una quasi–métrica definida sobre el conjunto de cláusulas de un lenguaje donde dos cláusulas equivalentes por subsunción se consideran la misma. Esta quasi–métrica (una métrica en la que no consideramos la condición de simetría) se basa en la relación de subsunción y se formaliza como una aplicación $dc : \mathbb{C}_R/\sim \times \mathbb{C}_R/\sim \rightarrow [0, +\infty]$ donde $\mathbb{C}/\sim$ es el espacio cociente obtenido a partir del conjunto de cláusulas $\mathbb{C}$ por la relación de equivalencia basada en subsunción.

## 1 Introducción

En este artículo, proponemos una solución al problema de cuantificar la proximidad entre cláusulas, considerándolas como elementos de un entramado de relaciones via subsunción que nos va a permitir acceder de una cláusula a otra, en cierto sentido, por el camino más corto. Esta aproximación representa una importante diferencia con otras aproximaciones [3, 5], que consideran los literales como elementos aislados. Para ello, proponemos

a) Que dos cláusulas equivalentes bajo subsunción se consideren idénticas. Este planteamiento es mucho más fuerte que la equivalencia módulo renombramiento y nos va a permitir definir nuestra función sobre clases de equivalencia.

b) Siguiendo la intuición geométrica, la distancia entre dos puntos será la longitud del camino más corto entre ellas, considerando que dos cláusulas están a distancia infinita si no existe un camino que las una.

Nuestra definición está basada en la relación de subsunción y en los estudios realizados por P.R.J. van der Laag y S.-H. Nienhuys–Cheng [7]. Empezamos nuestra exposición con una introducción al concepto de métrica y a la condición de simetría.

## 2 Métricas

En muchas ocasiones necesitamos simplificar la relación entre dos objetos a un número para poder establecer comparaciones entre ellos. A ese número se le suele llamar de manera genérica *distancia* y nos permite discriminar entre pares de objetos de manera sencilla. Así, decimos que dos ciudades $A$ y $B$ están más *próximas* que las ciudades $C$ y

*Parcialmente financiados por DGES, proyectos PB96–0098-C04–04 y PB96–1345

$D$ si la longitud del camino más corto de $A$ a $B$, i.e. la *distancia* que los separa, es menor que la longitud del camino más corto de $C$ a $D$. Análogamente, esa distancia puede medir el tiempo que transcurre entre dos eventos o la cantidad de combustible que necesita un vehículo para recorrer un trayecto.

Dado un conjunto cualquiera $X$, si asociamos a todo par de elementos $(x, y) \in X \times X$ su *"distancia"* obtenemos una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Pero obviamente no toda función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ va a ser una distancia. ¿Qué propiedades debe cumplir una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ para ser una distancia[1]? Está claro que los criterios deben ser suficientemente débiles para ser comunes a las diferentes distancias de intuición geométrica y suficientemente fuertes para establecer una teoría sólida que permita el tratamiento de los problemas asociados al concepto de distancia en situaciones abstractas. Fue Fréchet en su tesis doctoral en 1906 [1] quien afirmó que bastaba que la función verificara

- $(\forall x \in X)\,[d(x, x) = 0]$
- $(\forall x, y \in X)\,[d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y]$
- $(\forall x, y \in X)\,[d(x, y) = d(y, x)]$ *(Condición de simetría)*
- $(\forall x, y, z \in X)\,[d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)]$ *(Propiedad triangular)*

para poder desarrollar una teoría de los espacios métricos y desde entonces estas condiciones han sido consideradas los pilares básicos de la teoría.

Como ejemplos de distancias basadas en la intuición geométrica podemos citar tres conocidas distancias en $\mathbb{R}^2$. Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano.

- **Distancia euclídea** ($d_e$)**:** Dados dos puntos $A$ y $B$ de $\mathbb{R}^2$, la distancia $d_e$ mide la longitud del segmento de recta que une $A$ y $B$, esto es, del camino más corto de $A$ a $B$ suponiendo que no hay obstáculos en el plano

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- **Distancia Manhattan** ($d_m$)**:** En este caso también medimos la longitud del camino más corto de $A$ a $B$, pero a diferencia de la distancia euclídea, en la que suponemos que no hay ningún obstáculo entre $A$ y $B$, en la distancia Manhattan suponemos que los desplazamientos sólo pueden ser horizontales o verticales, simulando la circulación de un vehículo por calles en forma de cuadrícula.

$$d_m(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

- **Distancia del bosque** ($d_b$)**:** Un ejemplo, quizá menos conocido de distancia en $\mathbb{R}^2$, es esta distancia del bosque, que también mide la longitud del camino más corto entre dos puntos. Recibe este nombre porque representa en $\mathbb{R}^2$ la situación de una tribu en un lugar muy boscoso con un río en $y = 0$. Los habitantes de tal tribu, para llegar al agua han hecho brechas perpendiculares al río. Debido al espeso bosque, si alguien quiere ir de $A$ a $B$ sólo puede hacerlo por las brechas o por la orilla.

$$d_b(A, B) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{si } x_1 = x_2 \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

[1] El uso de *distancia* o *métrica* es indistinto. Tienen el mismo significado.

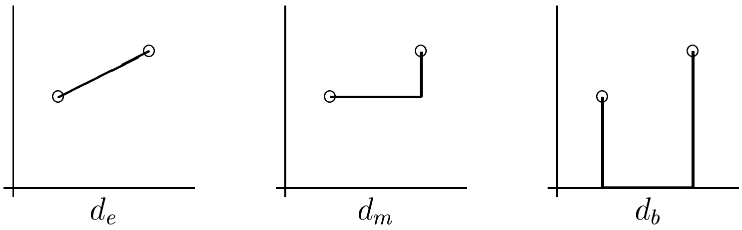


Figura 1

Llegado este punto, tiene sentido preguntarse por qué es necesario definir varias distancias sobre un mismo conjunto. La respuestas es clara. Cada distancia se adapta a una estructura previa en el conjunto y la distancia definida se ajustará o no, según el caso, a la relación preexistente. Si nuestro único interés es dotar al conjunto de una función que verifique las condiciones de Fréchet y no consideramos en el conjunto ninguna relación preestablecida, podemos considerar siempre la *distancia discreta*

$$d_d(A,B) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = B \\ 1 & \text{si } A \neq B \end{cases}$$

que verifica las condiciones para ser distancia, pero que difícilmente nos sería de utilidad práctica.

Una situación diferente se establece cuando la relación preexistente entre los objetos no es simétrica. El número de kilómetros que separa una ciudad $A$ a la orilla del mar de otra $B$ en la cima de una montaña es el mismo independientemente del sentido en que se recorra. Pero si nuestra idea de *"distancia"* mide el número de calorías que gasta un ciclista en hacer el recorrido, entonces nuestra definición de distancia pierde la condición de simetría.

# 3 Quasi–métricas

Las funciones de distancia no simétricas ya fueron consideradas por Hausdorff [2] a principios de siglo. Wilson [11] introdujo el término *quasi–metrics* para estas funciones en 1931. A lo largo del siglo diversos investigadores han contribuido al desarrollo de las distancias no simétricas, recibiendo recientemente un nuevo empuje con los trabajos en computación teórica de Lawson [4] o Smyth [10] entre otros.

**Definición 1 ([10])** *Una quasi–métrica sobre un conjunto $X$ es una aplicación de $X \times X$ en los reales no negativos, incluyendo posiblemente $+\infty$ tal que*

- $(\forall x \in X)\,[d(x,x) = 0]$
- $(\forall x, y \in X)\,[d(x,y) = d(y,x) = 0 \Rightarrow x = y]$
- $(\forall x, y, z \in X)\,[d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)]$

Nótese que una quasi–métrica verifica las condiciones de métrica de Fréchet, excepto la condición de simetría. Veamos algunos ejemplos (otros ejemplos más sofisticados pueden encontrarse en [10]).

**Ejemplo 1:** Dado cualquier conjunto parcialmente ordenado $\langle P, \leq \rangle$, la *quasi–métrica discreta* se define como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y \\ 1 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

**Ejemplo 2:** En el intervalo unidad $[0,1]$ podemos definir la quasi–métrica siguiente, cuya métrica asociada es la distancia euclídea en el conjunto.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y \\ x - y & \text{si } y < x \end{cases}$$

# 4 Cláusulas

A continuación recordamos algunas definiciones sobre cláusulas que usaremos más adelante. Una visión general puede obtenerse en [6].

En nuestra construcción consideraremos un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden. $Var$ y $Term$ son, respectivamente, los conjuntos de variables y términos de $\mathcal{L}$. Una *cláusula* es un conjunto finito de literales y $\mathbb{C}$ es el conjunto de las cláusulas del lenguaje.

Sea $S \subseteq Var$ un conjunto finito de variables. Una *sustitución* es una aplicación $\theta : S \to Term$ tal que $(\forall x \in S)[x \neq x\theta]$. Un *renombramiento* es una sustitución inyectiva $\theta$ tal que $(\forall x \in S)\,[x\theta \in Var]$. Si $C$ es una cláusula y $\theta$ es un renombramiento, $C$ y $C\theta = \{L\theta \,|\, L \in C\}$ son *variantes.*

Sean $C$ y $D$ dos cláusulas. $C$ *subsume* a $D$, $C \succeq D$, si existe una sustitución $\theta$ tal que $C\theta \subseteq D$. Si $C \succeq D$ y $D \succeq C$ entonces $C$ y $D$ son equivalentes por subsunción y lo escribiremos $C \sim D$. Si $C \succeq D$ y $D \not\succeq C$ escribiremos $C \succ D$. Una *cláusula reducida* es una cláusula $C$ tal que no tiene ningún subconjunto propio $D$ tal que $D \sim C$. Plotkin [8] probó que dos cláusulas reducidas equivalentes son variantes.

Puesto que $\sim$ es una relación de equivalencia, denotaremos por $\mathbb{C}/\!\sim$ el espacio cociente y, si $C \in \mathbb{C}$, $[C] = \{D \in \mathbb{C} \,|\, C \sim D\}$. Definimos el orden parcial $\succeq^*$ sobre $\mathbb{C}/\!\sim$ como $(\forall [C],[D] \in \mathbb{C}/\!\sim)\,([C] \succeq^* [D] \Leftrightarrow C \succeq D)$ El orden $\succeq^*$ está bien definido y no causará confusión si usamos $\succeq$ en lugar de $\succeq^*$.

# 5 Una quasi–métrica sobre las clases de equivalencia

En [7] Nienhuys–Cheng y Van der Laag definieron un operador de refinamiento $\rho_r$ que tomaba como dato de entrada una cláusula reducida $C$ y devolvía un conjunto de cláusulas reducidas $\rho_r(C)$:

**Definición 2 (Adaptada de [7])** *Sea $C$ una cláusula reducida. Entonces $D \in \rho_r(C)$ si $D$ es reducida y se verifica una de las siguientes condiciones:*

- $\rho_r^1$: *$C \succ D$ y existen dos cláusulas $C' \in [C]$ y $D' \in [D]$ tales que $C'\theta = D'$, donde $\theta$ es la sustitución $\theta = \{x/f(y_1,\ldots,y_n)\}$, $f$ es un símbolo de función*[2]*, $x$ ocurre en $C'$, y las variables $y_1,\ldots,y_n$ son variables distintas que no ocurren en $C'$.*

- $\rho_r^2$: *$C \succ D$ y existen dos cláusulas $C' \in [C]$ y $D' \in [D]$ tales que $C'\theta = D'$, donde $\theta = \{x/y\}$ y además las variables $x$ e $y$ ocurren en $C'$.*

- $\rho_r^3$: *$D = C \cup \{L\}$ donde $L$ sólo tiene variables distintas que no ocurren en $C$ y para todo literal $M \in C$, $L$ difiere de $M$ en el símbolo de predicado o en el signo.*

*Una $\rho_r$–cadena de longitud $n$ de $C$ a $D$ es una sucesión finita $C = C_0, C_1, \ldots, C_n = D$ tal que para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, $C_i \in \rho(C_{i-1})$.*

[2]Consideramos las constantes como símbolos de función de aridad cero.

En el mismo artículo [7] se prueba que si $C$ y $D$ son cláusulas reducidas y $C \succ D$ entonces existe una $\rho_r$–*cadena* de $C$ a $D$. Vamos a usar esas cadenas para formalizar la proximidad entre cláusulas. En nuestra definición, la distancia entre dos cláusulas vendrá determinada por la longitud del *camino* más corto entre ellas, considerando como camino la sucesión de clases de equivalencia asociada a una $\rho_r$–cadena.

**Definición 3** *Diremos que la sucesión $\mathcal{C} = \langle [C_0], \dots, [C_n] \rangle$, con $[C_i] \in \mathbb{C}/\!\sim$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ es una $L$–cadena de $[C_0]$ a $[C_n]$ si podemos elegir como representantes de dichas clases las cláusulas reducidas $C_0, \dots, C_n$ y dichas cláusulas forman una $\rho_r$–cadena. En ese caso diremos que la $L$–cadena $\mathcal{C}$ tiene longitud $n$ y lo denotaremos por $|\mathcal{C}| = n$. Denotaremos como $\mathbf{L}([C], [D])$ el conjunto de todas las $L$–cadenas de $[C]$ a $[D]$. El único elemento de $\mathbf{L}([C], [C])$ es la sucesión de longitud cero $\langle [C] \rangle$.*

Es trivial comprobar que si $\mathcal{C}_1 = \langle [C_0], \dots, [C_n] \rangle$ es una $L$–cadena de $[C_0]$ a $[C_n]$ y $\mathcal{C}_2 = \langle [D_0], \dots, [D_m] \rangle$ es una $L$–cadena de $[D_0]$ a $[D_m]$ con $[C_n] = [D_0]$, entonces

$$\mathcal{C}_3 = \langle [C_0], \dots, [C_n], [D_1], \dots, [D_m] \rangle$$

es una $L$–cadena de $[C_0]$ a $[D_m]$ de longitud $n + m$ que llamaremos la *concatenación* de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

Sabemos que si $C$ y $D$ son cláusulas reducidas y $C \succ D$, entonces existe una $\rho_r$–cadena de $C$ a $D$. Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4** *Consideremos $[C], [D] \in \mathbb{C}/\!\sim$ tales que $[C] \succ [D]$. Entonces existe una $L$–cadena de $[C]$ a $[D]$.*

*Demostración:* Sean $[C], [D] \in \mathbb{C}/\!\sim$ tales clases de equivalencia y sean $C'$ y $D'$ dos cláusulas reducidas tales que $C' \in [C]$ y $D' \in [D]$. Puesto que $C' \succ D'$, se tiene que existe una $\rho_r$–cadena de $C'$ a $D'$. Las clases de equivalencia asociadas a los elementos de la $\rho_r$–cadena forman una $L$–cadena de $[C]$ a $[D]$. ∎

A continuación definimos nuestra quasi–métrica. Si $[C] \succeq [D]$ entonces existe al menos una $L$–cadena de $[C]$ a $[D]$, (el conjunto $\mathbf{L}([C], [D])$ no es vacío) y tiene sentido considerar el mínimo del conjunto de longitudes de caminos en $\mathbf{L}([C], [D])$.

Siguiendo la intuición geométrica, si consideramos esas $L$–cadenas como *caminos* de $[C]$ a $[D]$, podemos definir nuestra quasi–métrica como la longitud del camino más corto de $[C]$ a $[D]$. Si no existe ningún camino, pensamos que $[D]$ no puede ser alcanzado desde $[C]$, así que están separados por una distancia infinita.

**Definición 5** *Definimos la aplicación $dc : \mathbb{C}/\!\sim \times \mathbb{C}/\!\sim \to [0, +\infty]$ de la siguiente manera*

$$dc([C], [D]) = \begin{cases} min\{|\mathcal{C}| \,:\, \mathcal{C} \in \mathbf{L}([C], [D])\} & si\ [C] \succeq [D] \\ +\infty & e.o.c. \end{cases}$$

**Teorema 6** *$dc$ es una quasi–métrica*

*Demostración:* (1) Puesto que $[C] \succeq [C]$ para todo $[C] \in \mathbb{C}/\!\sim$, se tiene que la $L$–cadena $\langle [C] \rangle \in \mathbf{L}([C], [C])$. Además $|\langle [C] \rangle| = 0$, luego $dc([C], [C]) = 0$.
(2) Si $dc([C], [D]) = dc([D], [C]) = 0$, entonces $[C] \sim [D]$ y por tanto $[C] = [D]$.
(3) Tenemos que probar que $dc([C_1], [C_3]) \leq dc([C_1], [C_2]) + dc([C_2], [C_3])$. Si $[C_1] \not\succeq [C_2]$ o $[C_2] \not\succeq [C_3]$ el resultado se tiene trivialmente, luego supongamos $[C_1] \succeq [C_2]$ y $[C_2] \succeq [C_3]$.

Sean $\mathcal{C}_1 = \langle [D_0], \ldots, [D_n] \rangle$ una $L$–cadena de $[C_1]$ a $[C_2]$ (esto es, $[D_0] = [C_1]$ y $[D_n] = [C_2]$) tal que $n = |\mathcal{C}_1| = dc([C_1], [C_2])$ y $\mathcal{C}_2 = \langle [D'_0], \ldots, [D'_m] \rangle$ una $L$–cadena de $[C_2]$ a $[C_3]$ (i.e., $[D'_0] = [C_2]$ y $[D_m] = [C_3]$ ) tal que $m = |\mathcal{C}_2| = dc([C_2], [C_3])$ Si concatenamos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ obtenemos $\mathcal{C}_{12} = \langle [D_0], \ldots, [D_n], [D'_1], \ldots, [D'_m] \rangle$ que es una $L$–cadena de $[C_1]$ a $[C_3]$ de longitud $n+m$, luego

$$\begin{aligned} d([C_1],[C_3]) &\leq |\mathcal{C}_{12}| \\ &= n+m \\ &= d([C_1],[C_2]) + d([C_2],[C_3]) \end{aligned}$$

■

Por tanto es una quasi–métrica. Si ahora volvemos a considerar las cláusulas aisladas y no las clases de equivalencia tendremos una función

$$\begin{array}{rccl} \widehat{dc}: & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & \langle C, D \rangle & \mapsto & \widehat{dc}(C,D) = dc([C],[D]) \end{array}$$

en la cual dos cláusulas equivalentes están a distancia cero (técnicamente una pseudo–quasi–distancia) en la cual mantenemos las siguientes propiedades:

a) $\widehat{dc}(C,D) = 0 \Leftrightarrow C \sim D$

b) $\widehat{dc}(C,D) = +\infty \Leftrightarrow C \not\geq D$

c) $(\forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C})\, [\widehat{dc}(C_1, C_3) \leq \widehat{dc}(C_1, C_2) + \widehat{dc}(C_2, C_3)]$

Pensamos que de esta manera, $\widehat{dc}(C,D)$ codifica de manera numérica suficiente información sobre la relación de subsunción entre $C$ y $D$ y permite un tratamiento algebraico de la relación de proximidad.

# 6 Trabajos relacionados

Como apuntábamos en la introducción, en la literatura puede encontrarse diversas aproximaciones al problema de cuantificar la relación de proximidad entre cláusulas. Nuestra propuesta se suma al esfuerzo de arrojar luz sobre el problema.

## 6.1 Nienhuys–Cheng [5] y Ramon y Bruynooghe [9]

En [5], Nienhuys-Cheng define una distancia para átomos cerrados

- $d_{nc,g}(e,e) = 0$
- $p/n \neq q/m \Rightarrow d_{nc,g}(p(s_1, \ldots, s_n), q(t_1, \ldots, t_m)) = 1$
- $d_{nc,g}(p(s_1, \ldots, s_n), p(t_1, \ldots, t_n)) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} d_{nc,g}(s_i, t_i)$

y luego considera la métrica de Hausdorff para trasladar esa distancia a conjuntos de átomos.

$$d_h(A,B) = \max\{\max_{a \in A}\{\min\{d_{nc,g}(a,b) \mid b \in B\}\}, \max_{b \in B}\{\min\{d_{nc,g}(a,b) \mid a \in A\}\}\}$$

El objetivo de esta distancia era definir una métrica entre interpretaciones de Herbrand, así que $d_{nc,g}$ estaba sólo definida sobre átomos cerrados. En [9], Ramon y Bruynooghe extendieron esta distancia a una función sobre expresiones cerradas y no cerradas:

- $d_{nc}(e_1, e_2) = d_{nc,g}(e_1, e_2)$ si $e_1, e_2$ son expresiones cerradas.
- $d_{nc}(p(s_1, \ldots, s_n), X) = d_{nc}(X, p(s_1, \ldots, s_n)) = 1$ con $X$ una variable.
- $d_{nc}(X, Y) = 1$ y $d_{nc}(X, X) = 0$ para todo $X \neq Y$ con $X$ e $Y$ variables.

Aplicando a $d_{nc}$ la métrica de Hausdorff tenemos una distancia sobre cláusulas, como muestra el siguiente ejemplo

$$\begin{array}{llll} C_1 = & \{p(f(U), X, f(a))\} & C_2 = & \{p(f(a), X, f(a))\} \\ C_3 = & \{p(f(a), X, f(a)), p(Z, X, Z)\} & C_4 = & \{p(f(a), X, f(a)), p(f(a), V, f(a))\} \end{array}$$

con $d_h(C_1, C_2) = \frac{1}{12}$, $d_h(C_1, C_3) = \frac{1}{3}$, $d_h(C_1, C_4) = \frac{1}{4}$. Se observa que los tres valores son muy distintos a pesar de que $C_2$, $C_3$ y $C_4$ son equivalentes bajo subsunción. Con nuestra función se tiene

$$\widehat{dc}(C_1, C_2) = \widehat{dc}(C_1, C_3) = \widehat{dc}(C_1, C_4) = 1$$

puesto que $[C_2] = [C_3] = [C_4]$ con $[C_1] \neq [C_2]$ y $C_1\theta = C_2$ con $\theta = \{U/a\}$.

## 6.2 Hutchinson [3]

En [3], Hutchinson da una pseudo-métrica sobre el conjunto de términos y la extiende al conjunto de literales. Entonces, considera la métrica de Hausdorff sobre el conjunto de cláusulas usando su pseudo–métrica sobre literales.

En su definición de distancia sobre términos, usa una función del conjunto de sustituciones sobre $\mathbb{R}$ llamada *size*. Da las condiciones que tiene que satisfacer una función para ser una *size* y da una función concreta con esas características

$$S(\theta) = \sum \{w_{f/n} \,|\, (\exists x)\, (x \in Var \text{ y } f/n \text{ ocurre en } x\theta)\}$$

donde $w_{f/n}$ es un peso positivo para el símbolo de función $f/n$. Con la métrica de Hausdorff basada en esa pseudo–métrica tenemos que para las cláusulas

$$C_1 = \{p(X, X, Y, Y)\} \qquad C_2 = \{p(U, V, U, V)\}$$

obtenemos los valores $d_h(C_1, C_1) = 0$ y $d_h(C_1, C_2) = 0$ a pesar de que $C_1$ y $C_2$ no son ni siquiera comparables bajo subsunción.

Con nuestra función $\widehat{dc}$, al no existir ningún camino de $C_1$ a $C_2$, esa relación de inaccesibilidad se codifica con el símbolo $+\infty$.

$$\widehat{dc}(C_1, C_2) = \widehat{dc}(C_2, C_1) = +\infty$$

# 7 Conclusiones

Este es un trabajo preliminar sobre cómo cuantificar la relación de proximidad entre cláusulas y se suma a otras aproximaciones en un intento de arrojar luz sobre el problema. La idea de nuestra aproximación es aprovechar la relación preexistente entre las cláusulas para definir una función de manera natural. Al ser esta relación de subsunción no simétrica, esta formalización de la proximidad tampoco tiene por qué serlo.

Consideramos que definir una distancia entre cláusulas aplicando la métrica de Hausdorff sobre una distancia entre literales quizá no sea lo más acertado ya que depende exclusivamente de valores extremos.

Por otro lado, quizá la formalización de distancia de Fréchet sea demasiado estricta para espacios donde la principal relación es la de orden parcial. En este sentido, pensamos que este artículo abre una puerta a esa nueva concepción en la formalización de proximidad.

# Referencias


[1] M. Fréchet: Sur quelques points du calcul fonctionnel. Reudicont del Circulo Matematico di Palermo, vol 22, 1906.

[2] F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.

[3] A. Hutchinson: Metrics on Terms and Clauses. Proc. ECML–97 Prague April 1997 (Springer). `ftp://ftp.dcs.kcl.ac.uk/pub/ tech-reports/ tr96-11.ps.gz`

[4] J.D. Lawson: Order and strongly sober compactifications, in: In: G.M. Reed, A.W. Roscoe and R.F. Wachter (Eds.), Topology and Category Theory in Computer Science, Oxford University Press, pp. 179–205, 1991.

[5] S-H. Nienhuys-Cheng: Distance between Herbrand interpretations: a measure for approximations to a target concept. Technical Report EUR–FEW–CS–97–05. Department of Computer Science, Erasmus University, the Netherlands, 1997. `www.few.eur.nl/few/research/pubs/cs/1997/eur-few-cs-97-05.pdf`

[6] S-H. Nienhuys-Cheng and R. de Wolf: Foundations of Inductive Logic Programming. LNCS 1228. Springer, 1997

[7] P.R.J. van der Laag, S.-H. Nienhuys-Cheng: Completeness and properness of refinement operators in Inductive Logic Programming. Journal of Logic Programming, Vol 34, n.3, pp.: 201–225, March 1998

[8] G.D. Plotkin: A Note on Inductive Generalization. In Machine Intelligence 5, pp.: 153–163. Edinburgh University Press, Edinburgh, 1970.

[9] J. Ramon and M. Bruynooghe: A framework for defining distances between first–order logic–objects. Report CW 263, Department of Computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, May 1998. `http://www.cs.kuleuven.ac.be/publicaties/rapporten/cw/CW263.ps.gz`

[10] M.B. Smyth: Totally bounded spaces and compact ordered spaces as domains of computation. In: G.M. Reed, A.W. Roscoe and R.F. Wachter (Eds.), Topology and Category Theory in Computer Science, Oxford University Press, pp. 207-229, 1991.

[11] W.A. Wilson: On quasi–metric spaces. Amer. J. Math. 53, pp. 675–684, 1931.